M 186

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS

CENTRE PARISIEN DE MANAGEMENT

Ecole Supérieure de Commerce de Paris

CONCOURS D'ENTRÉE 1978

Mathématiques 1re épreuve

MERCREDI 3 MAI 1978 DE 8 à 12 H

Durée : 4 heures

Dans ce problème, toutes les fonctions envisagées sont des fonctions d'une variable réelle x à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit F une telle fonction ; on note, si ces limites existent :

$$F(x + 0) = \lim_{h \downarrow 0} F(x + h)$$

$$F(x - 0) = \lim_{h \downarrow 0} F(x - h)$$

la notation $h \downarrow 0$ signifiant que h tend vers zéro par valeurs positives. On rappelle qu'une fonction F, définie au point x, est continue à gauche en x si et seulement si : $F(x) = F(x - 0)$.

PARTIE I

On considère la fonction F définie par :

$$\begin{cases} F(x) = 0 & x \leqslant a \\ F(x) = \dfrac{x}{8} & a < x \leqslant b \\ F(x) = \dfrac{x^2}{16} & b < x \leqslant c \\ F(x) = 1 & c < x \end{cases}$$

a, b, c étant trois nombres réels satisfaisant à : $a < b < c$.

1/ a) Montrer que, quels que soient a, b et c, F est continue à gauche sur $\mathbb{R}$.

.../...

b) A quelles conditions doivent satisfaire a, b, c pour que F soit continue pour toutes valeurs de x ? Est-elle dérivable quel que soit x ?

2/ Déterminer les conditions sur a, b, c, pour que F soit non-décroissante ; montrer que, si ces conditions sont réalisées, F peut alors être considérée comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire X : $F(x) = P(X < x)$

PARTIE II.

Dans cette seconde partie, on pose a = 0 , b = 2 , c = 4.
On note X la variable aléatoire ayant F pour fonction de répartition.

1/ Etudier la fonction F et tracer sa représentation graphique.

2/ Etudier la fonction F' dérivée de F par rapport à x.

3/ En désignant par F'_g la dérivée à gauche de F, définie quel que soit x, on note f la fonction telle que :

$$\begin{cases} f(x) = F'(x) \text{ en toute valeur x où F' est définie} \\ f(x) = F'_g(x) \text{ pour toute valeur } x_i \text{ où F' n'est pas définie.} \end{cases}$$

Montrer que f est continue à gauche, qu'elle est intégrable sur tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et que $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt$.

La fonction f apparaît ainsi, et on l'admettra, comme la fonction de densité de la variable aléatoire X.

4/ Calculer l'espérance mathématique E(X) et la variance V(X) de X.

5/ a) Etudier la variation de la fonction G de la variable u définie dans $\mathbb{R}$ par : $G(u) = \int_0^u [1 - F(x)]\,dx$

b) Montrer qu'il existe une valeur u_o, que l'on précisera, telle que $G(u) = E(X)$ pour $u \geq u_o$.

.../...

PARTIE III

On suppose dans cette troisième partie que a, b, c, satisfont aux conditions :

$$\begin{cases} 0 < a < b \\ 2 < b < c < 4 \end{cases}$$

On note $\{x_i\}$ l'ensemble des points x_i de discontinuité de la fonction F et $p_{x_i} = F(x_i + 0) - F(x_i - 0)$ le saut de la fonction F au point de discontinuité x_i.

1/ a) Expliciter les éléments de l'ensemble $\{x_i\}$.

b) Calculer toutes les valeurs p_{x_i}.

2/ Soit Φ la fonction définie par $\Phi(x) = \sum_{x_i<x} p_{x_i}$,

la sommation étant étendue à tous les points de discontinuité de F strictement inférieurs à x.
Etudier la fonction Φ et tracer sa représentation graphique (on pourra, pour ce tracé seulement, choisir a = 1 , b = 2,5 , c = 3).

3/ On note Ψ la fonction $\Psi = F - \Phi$.

a) Montrer que la fonction Ψ est continue et non-décroissante.

b) Pour quelles valeurs de x, Ψ n'est-elle pas dérivable ?

4/ Soit $\alpha = \lim_{x\to+\infty} \Phi(x)$ et $\beta = \lim_{x\to+\infty} \Psi(x)$.

a) Montrer que $\alpha \leqslant 1$ et $\beta \leqslant 1$.

b) Quelle relation existe-t-il entre α et β ?

5/ a) Montrer que l'on peut trouver deux fonctions de répartition l'une F_d en escalier, l'autre F_c continue, telles que F soit décomposable en :

$F = \lambda_1 F_d + \lambda_2 F_c$

où λ_1 et λ_2 sont deux réels, que l'on déterminera, satisfaisant aux conditions $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant \lambda_2 \leqslant 1$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

b) Une telle décomposition de F est-elle unique ?

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail